ROC: Restitution Organisée des Connaissances *

Terminale S

Septembre 2005

Table des matières

*Ce document a été réalisé à l'aide de LaTeX 2_ε, un lociciel libre.

1 Analyse

1.1 Limites et ordre

Théorème 1 Limites et ordre

1. *Théorème des « Gendarmes »*
   Si, pour x « assez voisin de a »(a fini ou infini), on a : $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ *et si u et v ont la même limite l en a, alors :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

2. *Cas d'une limite infinie*
   Si, pour x « assez voisin de a »on a $f(x) \geqslant u(x)$*, et si :*

$$\lim_{x \to a} u(x) = +\infty, \textit{ alors } \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

   (Énoncé analogue pour $-\infty$*)*

Démonstration :

Dans le cas où $a = +\infty$ (c'est le cas qui figure au programme, la démonstration des autres cas ne pourra vous être demandée.)
On considère un intervalle ouvert quelconque I contenant l.
La fonction u a pour limite l en $+\infty$ donc il existe un réel A tel que pour tout $x \in]A; +\infty[$ tous les nombres $u(x)$ sont dans I.
De même, pour la fonction v :
On note B le réel tel que pour tout $x \in]B; +\infty[$ on a : $v(x) \in I$.
On désigne par C le plus grand des nombres A et B. Alors pour tout $x \in]C; +\infty[$ on a : $v(x) \in I$ et $u(x) \in I$.
Or, on sait que $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$.

Donc, nécessairement $f(x) \in I$

Conclusion :

f a pour limite l quand $x \to +\infty$

1.2 Bijection

Théorème 2 *dit de la « bijection »*
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$,
Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution ***unique*** *dans $[A,B]$.*

Démonstration

Nous allons établir le théorème dans le cas où f est strictement croissante. Le cas où f est décroissante sera facile à en déduire.
On sait que f est une fonction continue sur $[a,b]$.

Considérons le réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel α tel que :

$$f(\alpha) = k$$

Supposons qu'il existe réel β tel que $\beta \neq \alpha$ et $f(\beta) = k$

Si $\beta > \alpha$, alors $f(\beta) > f(\alpha)$ (On sait que f est strictement croissante).

et donc : $f(\beta) \neq k$

Contradiction. La supposition est donc fausse, et le réel α est unique.

On procède de même si $\beta < \alpha$.

D'où le résultat.

1.3 Fonction composée

Théorème 3 *Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et g une fonction définie et dérivable sur un intervalle J tel que pour tout $x \in I$ on ait $u(x) \in J$.*
alors la fonction $f = g \circ u$ est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x)$$

En résumé, on note $(g \circ u)' = g' \circ u \times u'$

Démonstration :
Note importante : les commentaires officiels du programme précisent : « le principe de la démonstration sera indiqué »
Soit $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I (x \neq x_0)$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(u(x)) - g(u(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{g(u(x)) - g(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \quad \text{pour } x \neq x_0 \end{aligned}$$

on a :

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = u(x_0) = y_0$$

On pose $X = u(x)$. On a alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{g(u(x)) - g(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} &= \lim_{X \to y_0} \frac{g(X) - g(y_0)}{X - y_0} \\ &= g'(y_0) \end{aligned}$$

De plus :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0)$$

Conclusion :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= g'(y_0) \times u'(x_0) \\ &= g'(u(x_0)) \times g'(x_0) \end{aligned}$$

CQFD

1.4 Fonction exponentielle, existence et unicité

> **Propriété 1** *S'il existe une solution f dérivable sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $f' = f$ avec $f(0) = 1$,*
> *alors f est non nulle sur $\mathbb{R}$*

Démonstration :

On considère la fonction $g : x \mapsto f(x)f(-x)$. g est définie sur $\mathbb{R}$, et —par composition de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$— est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
En utilisant le théorème de dérivation composée, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) \\ &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \quad (f' = f) \\ &= 0 \end{aligned}$$

g est donc une fonction constante.
Or, $f(0) = 1$ donc $g(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $g(x) = 1$.
Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$.
Alors on aurait $g(a) = f(a)f(-a) = 0$. Contradiction.
La supposition est donc fausse et f ne s'annule jamais.

QED.

> **Théorème 4** *et Définition*
> *Il existe une unique fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.*
> *Cette fonction est la **fonction exponentielle**. On la note **exp**.*

Démonstration :
Existence :
le théorème d'existence et d'unicité de la fonction qui s'annule en a :
$x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ (voir théorème 16 page 16) permet de prouver l'existence de la fonction logarithme et de sa réciproque, la fonction exponentielle (grâce au théorème de la bijection).
Unicité :
Supposons qu'il existe une autre solution g vérifiant les conditions.
f ne s'annule pas, la fonction $\dfrac{g}{f}$ est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$\left(\dfrac{g}{f}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{f^2} = \dfrac{fg - gf}{f^2} = 0.$

La fonction $\dfrac{g}{f}$ est donc constante. Or, $\dfrac{g}{f}(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = 1$

Donc, pour tout réel x, $\dfrac{g}{f}(x) = 1$. D'où $f = g$

Conclusion :

La fonction f est unique.

1.5 Équation différentielle

Théorème 5 *Équation $y' = ky$*
Soit k un réel non nul. L'équation différentielle $f' = kf$ a pour ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$ l'ensemble des fonctions :

$$x \mapsto C\mathrm{e}^{kx}$$

Où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration :

- On pose $f(x) = C\mathrm{e}^{kx}$. On vérifie facilement que f est solution de l'équation.
- Réciproquement, soit f une solution de l'équation. On pose : $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-kx} \times f(x)$.
  g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = \mathrm{e}^{-kx}(f'(x) - kf(x)) = 0$ car $f' = kf$.
  La fonction g est donc constante et on pose $g(x) = C$. Alors on a :

$$f(x) = C\mathrm{e}^{kx}$$

Théorème 6 *Équation $y' = ay + b$*
*On considère l'équation différentielle $y' = ay + b$ **(1)** (a, b réels, $a \neq 0$), et l'équation sans second membre associée $y' = ay$ (ou bien $y' - ay = 0$). Alors :*

- *Il existe* une fonction constante g, solution particulière de *(1) :*

$$g(x) = -\frac{b}{a};$$

- *L'ensemble des solutions de (1) sont les fonctions :*

$$x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$$

Démonstration :

- la fonction $g : x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution de (1) : Immédiat.
- f est solution de (1) $\iff$ pour tout x on a $f'(x) - af(x) = b$,
  ie : $f'(x) - af(x) = g'(x) - ag(x)$
  autrement dit : $(f - g)' = a(f - g)$
  c'est à dire : f est solution de (1) $\iff$ $f - g$ est solution de $y' = ay$.
  D'après le théorème précédent, on doit avoir pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f - g)(x) = C\mathrm{e}^{ax}$
  où C est une constante réelle.

Conclusion : les solutions de (1) sont les fonctions :

$$x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Théorème 7 *condition initiale*
Il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ *vérifiant la condition initiale :*

$$y(x_0) = y_0. \ (x_0 \textit{ et } y_0 \textit{réels donnés}).$$

Démonstration :
D'après le théorème précédent, l'ensemble des solutions de l'équation est de la forme :

$$f : x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

on doit avoir $f(x_0) = y_0$, soit $y_0 = C\mathrm{e}^{ax_0} - \dfrac{b}{a}$

Autrement dit : $C = \left(y_0 + \dfrac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-ax_0}$

Il existe donc un seul réel C et la propriété est démontrée.

(Note : On peut aussi faire une démonstration par l'absurde)

1.6 Propriétés des fonctions logarithme et exponentielle

1.6.1 La fonction exponentielle

Théorème 8 *Relation fonctionnelle*
Pour tous réels a et b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

Démonstration :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \mapsto \exp(a+b-x) \times \exp(x)$
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\exp(a+b-x) \times \exp(x) + \exp(a+b-x) \times \exp(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

la fonction f est donc une fonction constante.
De plus, $f(0) = \exp(a+b) \times \exp(0) = \exp(a+b)$, et $f(b) = \exp(a) \times \exp(b)$
f étant constante, on a alors :
$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

Théorème 9 *Propriétés algébriques*
Pour tous réels a et b, et pour tout entier relatif n, on a :

- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$
- $\exp(na) = [\exp(a)]^n$ $(n \in \mathbb{Z})$
- $\exp\left(\dfrac{a}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(a)}$

Démonstration : Immédiate à partir du théorème précédent.

Théorème 10 *Relation fonctionnelle caractéristique*
Il existe une seule fonction f dérivable , non nulle sur $\mathbb{R}$ telle que :
$f(a+b) = f(a) \times f(b)$ *et* $f(0) = 1$
Cette fonction est la fonction exponentielle

Démonstration :

On sait que la fonction exponentielle vérifie les quatres conditions. Démontrons l'unicité.

Supposons qu'il existe une autre fonction g vérifiant ces conditions. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x+b) = g(x) \times g(b)$.

La fonction $x \mapsto g(x+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :
$g'(x+b) = g'(x) \times g(b)$, et pour $x = 0$, on a : $g'(b) = g(b)$

De plus $g(0) = 1$. La fonction g vérifie donc l'équation différentielle $f' = f$ et est la solution telle que $f(0) = 1$

g est donc la fonction exponentielle.
Contradiction. La supposition est donc fausse, et l'unicité est démontrée.

1.6.2 Le logarithme

Théorème 11 *Propriétés algébriques*
Pour tous réels a et b strictement positifs, et pour tout entier relatif n, on a :

- $\ln ab = \ln a + \ln b$
- $\ln a^n = n \ln a$
- $\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a \ (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln \frac{1}{b} = - \ln b$

Démonstration :
La démonstration repose sur l'utilisation des propriétés de la fonction exponentielle, sa réciproque. Démonstration du premier point :
on pose $U = \ln ab$ et $V = \ln a + \ln b$
Alors on a :

$$\begin{aligned} \exp(U) &= \exp(\ln ab) \\ &= ab \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \exp(V) &= \exp(\ln a + \ln b) \\ &= \exp(\ln a) \times \exp(\ln b) \\ &= ab \end{aligned}$$

on a alors $\exp(U) = \exp(V)$, donc nécessairement $U = V$ (l'exponentielle est bijective)
Autrement dit : $\ln ab = \ln a + \ln b$
On démontre le second point à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Théorème 12 *Equation fonctionnelle caractéristique*
Si f est une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ telle que $f(ab) = f(a) + f(b)$ et $f'(1) = 1$, alors f est la fonction ln

Démonstration :
Soit f une telle fonction. On a alors : $f(1 \times a) = f(1) + f(a)$
Autrement dit, $f(a) = f(1) + f(a)$. D'où $f(1) = 0$.
On considère la fonction F définie par $F(x) = f(ax)$
F est une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$
Et on a : $F'(x) = af'(ax)$
Or, $f(ax) = f(a) + f(x)$ donc : $F'(x) = f'(x)$
On en déduit que : $f'(x) = af'(ax)$

Et, pour $x = 1$, on a : $f'(1) = 1 = af'(a)$
On a alors pour $a > 0$: $f'(a) = \frac{1}{a}$
En résumé, la fonction f est donc telle que :

- $f(1) = 0$
- $f'(a) = \frac{1}{a}$ pour $a > 0$

Conclusion :
La fonction f est donc la fonction ln

1.7 Les suites

Propriété 2 *Suites divergentes*
- *Une suite croissante et non majorée diverge vers* $+\infty$
- *Une suite décroissante et non minorée diverge vers* $-\infty$

Démonstration :
Démontrons le premier point. La méthode est analogue pour le second point.
Soit (u_n) une suite croissante non majorée, et A un nombre réel quelconque.
La suite n'est pas majorée, donc il existe un rang k tel que $u_k > A$
Or, la suite (u_n) est croissante, donc pour tout $n > k$, on a : $u_n \geqslant u_k$
Donc pour tout entier $n > k$, on a $u_n > A$
Conclusion : La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Théorème 13 *Suites adjacentes*
Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent et elles ont la même limite

Démonstration :
Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que :
(u_n) soit croissante, (v_n) décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

1. Montrons que pour tout n, $u_n \leqslant v_n$
   On pose $w_n = v_n - u_n$. Étudions le sens de variation de (w_n)

$$\begin{array}{rcl} w_{n+1} - w_n & = & (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) \\ & = & (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \end{array}$$

   Or, la suite (u_n) est croissante, donc $(u_{n+1} - u_n) \geqslant 0$
   Et la suite (v_n) est décroissante, donc $(v_{n+1} - v_n) \leqslant 0$
   On en déduit que : $(w_{n+1} - w_n) \leqslant 0$, la suite est donc décroissante.
   De plus on sait que : $\lim\limits_{\infty} v_n - u_n = 0$
   la suite (w_n) est donc positive et pour tout n
   on a : $v_n - u_n \geqslant 0 \iff v_n \geqslant u_n$
2. Montrons que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.
   pour tout n, on sait que $u_n \leqslant v_n$.
   Or, la suite (v_n) est décroissante, donc pour tout $n, v_n \leqslant v_0$.
   On en déduit que pour tout n, $u_n \leqslant v_0$
   Conclusion : la suite (u_n) est croissante et majorée par v_0, donc convergente.
   On procède de même pour la suite (v_n).

3. Montrons que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
   la suite (u_n) converge vers L, et la suite (v_n) converge vers l.
   D'après les propriétés de la limite d'une différence, on a :
   $\lim\limits_{\infty}(v_n - u_n) = l - L$
   Or, $\lim\limits_{\infty} v_n - u_n = 0$
   donc $l - L = 0$, c'est à dire : $l = L$.
   Conclusion :
   les suites convergent vers la même limite et le théorème est démontré.

1.8 Croissances comparées

Théorème 14 *Croissances comparées - limites fondamentales*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Démonstration :

1. Déterminons la limite de $\dfrac{e^x}{x}$ en $+\infty$

   Dans le cours, ces propriétés sont appelées « croissance comparée ». Comparons les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x$, et montrons que pour tout x réel, $e^x \geqslant x$.

   On pose : $g(x) = e^x - x$.

   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions dérivables) et on a : $g'(x) = e^x - 1$

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\iff e^x - 1 > 0 \\ &\iff e^x > 1 \\ &\iff e^x > e^0 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

   On a : $g(0) = 1$

   d'où le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

   La fonction g est donc positive et pour tout x, on a : $e^x \geqslant x$

   Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} & e^{\left(\frac{x}{2}\right)} \geqslant \frac{x}{2} \\ \iff & \left[e^{\left(\frac{x}{2}\right)}\right]^2 \geqslant \left(\frac{x}{2}\right)^2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \iff & e^x \geqslant \frac{x^2}{4} \\ \iff & \frac{e^x}{x} \geqslant \frac{x}{4} \end{aligned}$$

   Or, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty$ D'où le résultat : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty}$

2. Démonstration de la limite de $\dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $t = \ln x$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} t = +\infty$

De plus :

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{t}{e^t}$$

Or, d'après ce qui précède, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$

donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t}{e^t} = 0$

On en déduit que : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0}$

Théorème 15 *Corrolaire*

Pour tout entier $n \geqslant 1$:

- $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$

Démonstration :

C'est un corrollaire de ce qui précède,

mais pour la limite de $\dfrac{e^x}{x^n}$ en $+\infty$, on écrit :

$$\frac{e^x}{x^n} = \left[\frac{e^{\left(\frac{x}{n}\right)}}{\left(\frac{x}{n}\right)} \right]^n \times \frac{1}{n^n}$$

Le théorème de la limite de la composée de fonctions permet de conclure.

1.9 Primitive s'annulant en a

Théorème 16 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in I$.*
La fonction F définie par :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration :

On suppose que f est continue et croissante sur I
(Le cas général est admis et sa démonstration n'est **pas** au programme)

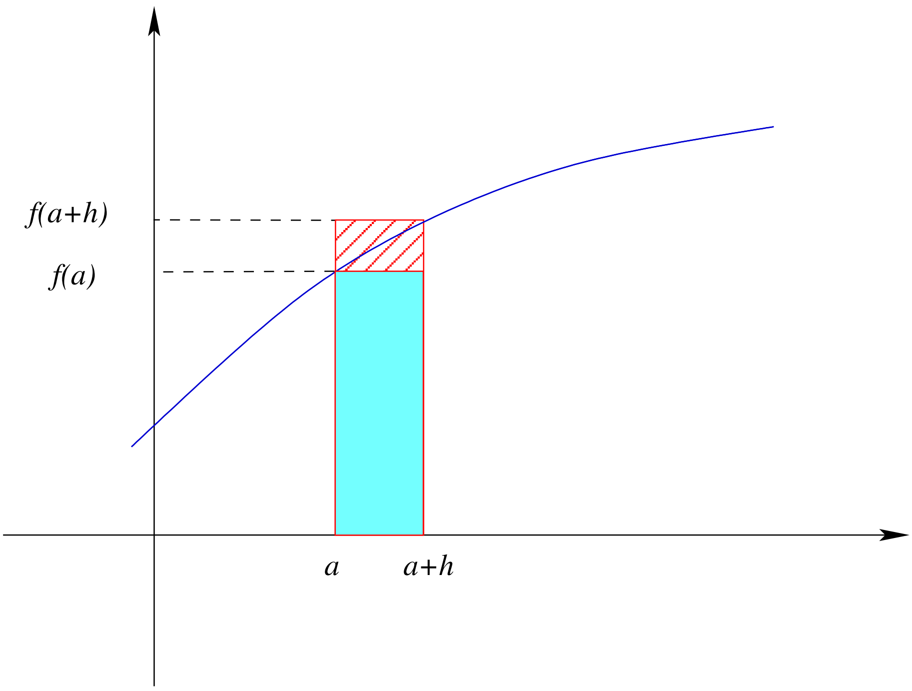
Existence : On sait que toute fonction continue sur un intervalle I admet une intégrale sur cet intervalle.

Donc, pour tout $x \in I$, l'intégrale $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe.

Il existe donc une fonction F définie sur I par $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Soit $\alpha \in I$ et $h > 0$ tel que $\alpha + h \in I$.

f étant une fonction positive et croissante, $F(\alpha+h) - F(\alpha)$ est une aire encadrée par l'aire de deux rectangles de largeur h :



$$h \times f(\alpha) \leqslant F(\alpha + h) - F(\alpha) \leqslant h \times f(\alpha + h)$$

On a alors

$$f(\alpha) \leqslant \frac{F(\alpha + h) - F(\alpha)}{h} \leqslant f(\alpha + h)$$

Or on sait que f est continue, donc $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(\alpha + h) = f(\alpha)$

Ce qui implique d'après le théorème des gendarmes (Théorème 1) que :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{F(\alpha + h) - F(\alpha)}{h} = f(\alpha)$$

On démontre de manière analogue le résultat si $h < 0$.

Il en résulte que : $F'(\alpha) = f(\alpha)$

Autrement dit, F est dérivable sur I et sa dérivée est f.

Unicité :

On sait que $F(a) = 0$

Supposons que G est une autre primitive de f vérifiant $G(a) = 0$.

Nécessairement, pour tout $x \in I$, on a : $G(x) = F(x) + C$ où C est une constante réelle non nulle.

On a alors : $G(a) = F(a) + C = C$. Or, $C \neq 0$

Contradiction.

La supposition est donc fausse, et la fonction F est unique.

1.10 Intégration Par Parties

Théorème 17 *Intégration par parties*
Soient u *et* v *deux fonctions continues et dérivables sur l'intervalle* I *telles que leurs dérivées soient* ***continues*** *sur* I.
Pour tous réels a *et* b *de* I*, on a :*

$$\int_a^b \mathrm{u}'(t)\mathrm{v}(t)\mathrm{d}t = [\mathrm{u}(t)\mathrm{v}(t)]_a^b - \int_a^b \mathrm{u}(t)\mathrm{v}'(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration :
u et v sont dérivables sur I, on a donc :
$(\mathrm{uv})' = \mathrm{u}'\mathrm{v} + \mathrm{uv}'$
La fonction $(\mathrm{uv})'$ est continue donc intégrable sur I et on a pour tous réels a et b de I :

$$\begin{aligned}\int_a^b (\mathrm{uv})'(t)\mathrm{d}t &= \int_a^b (\mathrm{u}'\mathrm{v} + \mathrm{uv}')(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b (\mathrm{u}'\mathrm{v})(t)\mathrm{d}t + \int_a^b (\mathrm{uv}')(t)\mathrm{d}t \text{ (linéarité)}\end{aligned}$$

Or :

$$\int_a^b (\mathrm{uv})'(t)\mathrm{d}t = [\mathrm{u}(t)\mathrm{v}(t)]_a^b$$

on en déduit alors que :

$$\int_a^b \mathrm{u}'(t)\mathrm{v}(t)\mathrm{d}t = [\mathrm{u}(t)\mathrm{v}(t)]_a^b - \int_a^b \mathrm{u}(t)\mathrm{v}'(t)\mathrm{d}t$$

2 Géométrie

2.1 Module et argument d'un produit, d'un quotient

Théorème 18 *Module d'un produit, d'un quotient de nombres complexes*
Soient les nombres complexes z et z'
Aolrs on a :
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ *avec* $z' \neq 0$

Démonstration :

$$\begin{aligned} |zz'|^2 &= zz' \times \overline{zz'} \\ &= zz' \times \bar{z}\overline{z'} \\ &= z\bar{z} \times z'\overline{z'} \\ &= |z|^2 \times |z'|^2 \end{aligned}$$

Le module d'un nombre complexe est positif, on en déduit donc :
$|zz'| = |z| \times |z'|$
Supposons $zz' = 1$ alors on a $|zz'| = |z| \times |z'| = 1$
et pour $z' \neq 0$: $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$
On a alors : $\left|z \times \frac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
D'où le résultat.

Théorème 19 *Argument du produit, du quotient d'un nombre complexe*
Soient z et z' deux nombres complexes. Alors on a :
- $arg(zz') = arg(z) + arg(z') + 2k\pi$ *où* $k \in \mathbb{Z}$
- $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z') + 2k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$

Démonstration :

$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos a + \mathrm{i}\sin b) \times r'(\cos a' + \mathrm{i}\sin b') \\ &= rr' \times (\cos a + \mathrm{i}\sin b) \times (\cos a' + \mathrm{i}\sin b') \\ &= rr'[(\cos a\cos a' - \sin b\sin b') + \mathrm{i}(\cos a\sin b' + \sin b\cos a')] \\ &= rr'[\cos(a + a') + \mathrm{i}\sin(a + a')] \end{aligned}$$

on a alors $arg(zz') = arg(z) + arg(z') + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
Si $zz' = 1$ alors $arg(zz') = arg'(z) + arg(z') = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
d'où $arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -arg(z') + 2k\pi$ avec $z' \neq 0$
Conclusion : $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z') + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2.2 Résolution générale de l'équation du second degré

Propriété 3 *Équation du second degré dans* $\mathbb{C}$
On considère l'équation : $az^2+bz+c=0$ *avec* a, b, c *trois réels et* $a \neq 0$.
le discriminant de l'équation est : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- *Si* $\Delta > 0$, *l'équation a deux solutions réelles distinctes,* x_1 *et* x_2 *:*

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- *Si* $\Delta = 0$, *l'équation a une racine double :*

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

- *Si* $\Delta < 0$, *l'équation a deux solutions complexes conjuguées :*

$$z_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
$$z_2 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Démonstration :
On considère l'expression $P(z) = az^2 + bz + c$

En utilisant la forme canonique, on a alors $P(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

- Si $\Delta > 0$, alors on obtient une différence de deux carrés et l'on peut factoriser l'expression $P(z)$. Les solutions sont les mêmes que pour la résolution dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, $P(z)$ est alors un carré "parfait" et on a la solution $z = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$ On a alors :

$$\begin{aligned} P(z) &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2.3 Écriture complexe des transformations du plan

Théorème 20 *Écriture complexe des transformations*
Soit Ω un point du plan complexe d'affixe ω, et θ un nombre réel.

- *La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe u associe le point $M'(z)$ au point $M(z)$ tel que : $z' = z + u$*
- *La rotation de centre Ω et d'angle θ associe le point $M'(z)$ au point $M(z)$ tel que : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$*
- *L'homothétie de centre Ω et de rapport k (réel non nul) associe le point $M'(z)$ au point $M(z)$ tel que : $z' - \omega = k(z - \omega)$*

Démonstration :

- Translation :
  On doit avoir $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$ d'où $z' - z = u$, c'est à dire $z' = z + u$
- Rotation :
  On doit avoir :
  $\Omega M = \Omega M'$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
  C'est à dire pour $M \neq \Omega$:

$$\begin{aligned}
\Omega M = \Omega M' &\iff |z' - \omega| = |z - \omega| \\
&\iff \left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \\
\text{et : } (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} &\iff (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega M'}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega M}) = \theta + 2k\pi \\
&\iff arg(z' - \omega) - arg(z - \omega) = \theta + 2k\pi \\
&\iff arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta + 2k\pi
\end{aligned}$$

  Le nombre complexe $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ a donc pour module 1 et pour argument θ, d'où : $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$
  c'est à dire : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$
  Pour $M = \Omega$, la propriété est aussi vérifiée.
- Homothétie :
  Pour tout M, ona :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k \times \overrightarrow{\Omega M} \iff z' - \omega = k(z - \omega)$$

  d'où le résultat.

2.4 Distance d'un point à un plan

Note : L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

Théorème 21 *Distance d'un point à un plan*
Soit A un point de l'espace, $\overrightarrow{n}$ *un vecteur non nul. Le plan* $\mathscr{P}$ *est le plan passant par A et de vecteur normal* $\overrightarrow{n}$
Soit M un point de l'espace, et H son projeté orthogonal sur $\mathscr{P}$*. La distance de M au plan* $\mathscr{P}$ *est donnée par :*

$$MH = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}|}{||\overrightarrow{n}||}$$

Démonstration :

Les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{n}$ son colinéaires, donc il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{HM}= k\overrightarrow{n}$

De plus : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$ donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \overrightarrow{n} \\
&= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{n} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{n} \\
&= \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{n} \ (\overrightarrow{n} \text{ est normal au plan contenant} A \text{ et } H) \\
&= k\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n} \\
&= k||\overrightarrow{n}||^2
\end{aligned}$$

On en déduit que $k = \dfrac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}}{||\overrightarrow{n}||^2}$ ($\overrightarrow{n}$ est non nul), d'où $\overrightarrow{HM}= \left(\dfrac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}}{||\overrightarrow{n}||^2}\right)\overrightarrow{n}$

Conclusion : $MH = \dfrac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}|}{||\overrightarrow{n}||}$

Corollaire 1 *Distance d'un point à un plan : calcul pratique*
Soit $\mathscr{P}$ *un plan de l'espace d'équation* $ax + by + cz + d = 0$ *et* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *un point de l'espace. La distance de M à* $\mathscr{P}$ *est donnée par :*

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Démonstration :
Immédiate :
Soit $A(x_1, y_1, z_1)$ un point quelconque du plan $\mathscr{P}$. Le vecteur $\overrightarrow{n}\ (a, b, c)$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM_0}\ .\ \overrightarrow{n} &= a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) \\
&= ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_1 + by_1 + cz_1) \\
&= ax_0 + by_0 + cz_0 + d \text{ car } A \in \mathscr{P}
\end{aligned}$$

De plus : $\| \overrightarrow{n} \| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
D'où le résultat.

2.5 Distance d'un point à une droite dans le plan

Théorème 22 *Distance d'un point à une droite*
La distance du point $M(x_0, y_0)$ à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ est donnée par :

$$d(M, \mathscr{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Démonstration :
Analogue à la démonstration précédente du théorème 21 page 23

3 Probabilités

3.1 Formule des probabilités totales

Théorème 23 *Probabilités totales*
Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements réalisant une partition de l'univers Ω et B un événement quelconque. On a alors :

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) \times P(A_i) \\ &= P_{A_1}(B)P(A_1) + P_{A_2}(B)P(A_2) + \cdots + P_{A_n}(B)P(A_n) \end{aligned}$$

Démonstration :
les événements $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots, A_n \cap B$
réalisent une partition de l'événement B on a donc :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

Or pour $i = 1, 2, \ldots, n$ on a : $P(A_i \cap B) = P_{A_i}(B) \times P(A_i)$
D'où le résultat.

3.2 Triangle de Pascal - Binôme de Newton

Propriété 4 *n et p sont des entiers naturels tels que $p \leqslant n-1$*

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
3. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
4. $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

Démonstration :
Soit E un ensemble à n éléments.

1. Immédiat
2. Si A contient p éléments de E, alors son complémentaire en contient $n-p$, d'où le résultat.
3. Même raisonnement que précédemment.
4. Par le calcul :

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)![(n-1)-(p-1)]!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} \\
&= \frac{p(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{(n-p)p!(n-p-1)!} \\
&= \frac{p(n-1)! + (n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times [p + (n-p)]}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}
\end{aligned}$$

Propriété 5 *Binôme de Newton*
Pour tous réels a, b et pour tout n entier naturel $(n \geqslant 1)$ on a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n
\end{aligned}$$

Démonstration :

Par récurrence sur n.

<u>Initialisation</u> :

Pour $n = 1$, on a : $(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$

La propriété est donc vérifiée pour $n = 1$.

<u>Hérédité</u> :

Supposons que la propriété est vraie au rang $n-1$. (HR)

Démontrons qu'elle est vraie au rang n

On sait que :

$$(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b) \times (a+b)^{n-1} \\
&= (a+b) \times \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k \quad \text{(HR)} \\
&= a \times \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k + b \times \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^{k+1} \\
&= \binom{n-1}{0} a^n + \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right] a^{n-1} b + \ldots \\
&\quad \cdots + \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right] a^{n-1-k} b^k + \ldots \\
&\quad \cdots + \left[\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}\right] a b^{n-1} + \binom{n-1}{n-1} b^n
\end{aligned}$$

Or, on sait que : $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

De plus : $\binom{n-1}{0} = \binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

D'où le résultat.