LA FONCTION EXPONENTIELLE

=> elle fait apparaître une équation différentielle : $f' = f \iff \exp' = \exp$

=> Sa condition initiale est $f(0) = 1 \iff \exp(0) = 1$

=> elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ => preuve avec $\varphi(x) = f(x) \times f(-x)$ -> dérive -> constante -> rang 0 -> pour tout x

UNICITÉ

$g' = g \,/\, g(0) = 1$ => considère $\frac{g}{\exp}$ -> dérive -> constante -> rang 0 -> pour tout x => $g = \exp$

PROPRIÉTÉS

* $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ => $\varphi(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(x)}$ -> dérive -> constante -> rang 0 -> $\varphi(0) = \exp(a)$ -> rang b
  -> $\varphi(0) = \varphi(b) = \frac{\exp(a+b)}{\exp(b)} = \exp(a)$
  => $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$

* $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$ => $\exp(a) \times \exp(-a) = \exp(a-a) = \exp(0) = 1$
  -> $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$

* $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$ => $\exp(a-b) = \exp(a) \times \exp(-b) = \exp(a) \times \frac{1}{\exp(b)} = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

* $\exp(na) = (\exp(a))^n$ => récurrence

* $\exp(a) = \exp\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \exp\left(\frac{a}{2}\right) \times \exp\left(\frac{a}{2}\right) = \left[\exp\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2 > 0$

ETUDE

* e^x croissante sur $\mathbb{R}$ => $(e^x)' = e^x > 0$

* $x = y$ ssi $e^x = e^y$ => supposer $x < y$ alors e^x croissante et $e^x < e^y$ -> utiliser contradiction

* $x < y$ ssi $e^x < e^y$ => utiliser contradiction

* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ => $f(x) = e^x - x$ -> $f'(x) = e^x - 1$ -> $e^x \geq 1$ sur $[0;+\infty[$ -> $f(x) \geq 0$ -> $e^x > x$ -> lim

* $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ => $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ -> $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ -> $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$ => $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ => $\frac{e^x - 1}{x - 0}$ -> $\lim \frac{e^x - 1}{x - 0} = (e^0)' = e^0 = 1$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ => $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ -> $f'(x) = e^x - x$ -> $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$
  -> $f(x) > 0$ -> $e^x > \frac{x^2}{2}$ -> $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ -> lim

* $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$ => $x e^x = -(-x) e^x$ -> $X = -x$ -> $x e^x = -X e^x = -\frac{X}{e^X}$
  -> $\lim\limits_{X \to +\infty} -\frac{X}{e^X} = 0$

$\boxed{\text{=> à l'infini, expo l'emporte sur les puissances de } x}$