Le dipôle électrostatique

1 Définition, potentiel et champ créés

1.1 Définition du dipôle électrostatique

On appelle *dipôle électrostatique* le système constitué de deux charges ponctuelles opposées $-q$ et q situées en deux points N et P distants de a et tels que $a = NP$ soit très petite devant les autres distances envisagées.

1.2 Moment dipolaire

On définit alors le *moment dipolaire* (FIGURE 1) de la distribution par le vecteur :

$$\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$$

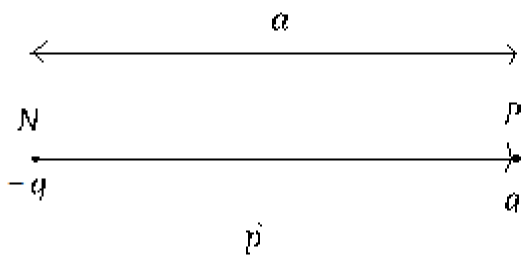

FIGURE 1 Moment dipolaire

L'unité de cette quantité est donc, dans les unités du Système International, le coulomb mètre ($\mathrm{C.m}$).

Compte-tenu des ordres de grandeur[1], on préfère souvent donner les moments dipolaires en debye de symbole D : 1 D $= 3{,}336.10^{-30}$ $\mathrm{C.m}$.

On peut aussi noter qu'un dipôle électrostatique est la limite d'un ensemble de deux charges ponctuelles $-q$ et q placées en N et P tel que la distance NP tend vers zéro tandis que le moment dipolaire $p = qNP$ reste constant et fini.

[1] Cette unité n'est pas adaptée aux ordres de grandeur rencontrés en chimie.

1.3 Potentiel électrostatique créé par un dipôle

– **Invariances et symétries du dipôle :**

On utilise les coordonnées sphériques pour décrire le problème. La distribution est invariante par rotation autour de l'axe du dipôle, donc le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et le potentiel électrostatique $V(M)$ ne dépendent pas de φ.

Pour tenir compte de ces propriétés, on se place en coordonnées sphériques dans un plan méridien (FIGURE 2) ou plan tel que $\varphi = constante$ et on utilise les coordonnées polaires dans ce plan (c'est-à-dire les deux autres coordonnées sphériques r et θ).

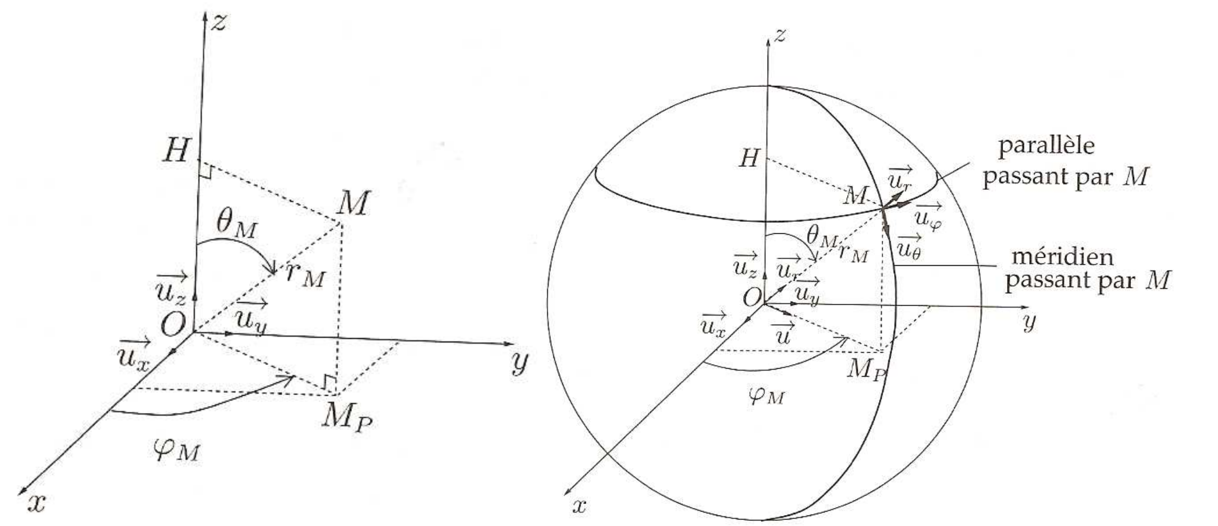

FIGURE 2 Coordonnées sphériques (à gauche) et base locale sphérique (à droite)

– **Calcul du potentiel créé par un dipôle :**

Le potentiel créé en M par le dipôle est égal d'après ce qu'on a écrit précédemment à :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{MN} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{MP} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{MP} - \frac{1}{MN}\right)$$

On appelle O le milieu du segment $[NP]$.

On se place en coordonnées polaires d'origine O dans un plan contenant le point M et la droite (NP) sans perdre en généralité du fait de la symétrie autour de cette droite (FIGURE 3).

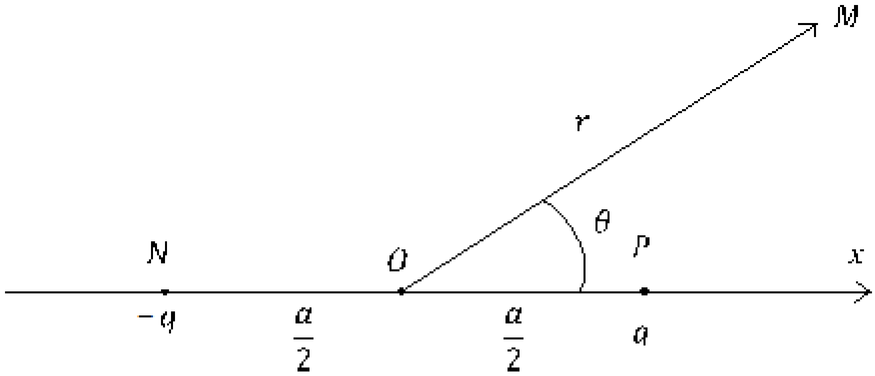

FIGURE 3 Moment dipolaire

On obtient :

$$(MP)^2 = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP}\right)^2 = MO^2 + OP^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OP} = r^2 + \frac{a^2}{4} - 2r\frac{a}{2}\cos\theta$$

D'où :

$$\frac{1}{MP} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Comme le point M est « loin » de la distribution, on a $a \ll r$ et on peut effectuer un développement limité de la relation précédente :

$$\frac{1}{MP} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a}{r}\cos\theta + \mathrm{o}\left(\frac{a}{r}\right)\right)$$

Ce qui permet d'obtenir l'expression du potentiel dans le cadre de l'approximation considérée (au premier ordre en $\frac{a}{r}$) :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a}{r}\cos\theta - 1 + \frac{1}{2}\frac{a}{r}\cos\theta\right) = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Or $qa = p$ et $p\cos\theta = \vec{p}.\frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ donc :

$$\boxed{\boldsymbol{V(M) = \frac{\vec{p}.\overrightarrow{OM}}{4\pi\varepsilon_0 OM^3} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}}$$

1.4 Champ électrostatique créé par un dipôle

- **Invariances et symétries du dipôle :**

Du fait des invariances déjà étudiées et de l'indépendance par rapport à φ, on se place dans un plan contenant le point M et l'axe du dipôle et on utilise les coordonnées polaires dans ce plan.

De plus, tout plan contenant cet axe est un plan de symétrie des sources donc le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ appartient à ce plan.

- **Expression du champ créé :**

On déduit l'expression du champ électrostatique du potentiel à partir de la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

et de l'expression obtenue pour le potentiel :

$$V(M) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

En coordonnées polaires[2] :

$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}\overrightarrow{u_\theta}}$$

Ce champ peut également s'écrire :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p}.\overrightarrow{OM})\overrightarrow{OM} - OM^2\vec{p}}{OM^5}}$$

[2] On rappelle, en coordonnées cylindriques, l'expression du gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}U(r,\theta,z) = \frac{\partial U(r,\theta,z)}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U(r,\theta,z)}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial U(r,\theta,z)}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

Il suffit par exemple d'écrire que $3 = 2 - 1$ et d'identifier $p\cos\theta$ au produit scalaire de $\vec{p}$ par le vecteur unitaire directeur de $\overrightarrow{OM}$ et $p\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} + p\sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$ à la projection de $\vec{p}$ dans la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$.

Le potentiel créé par le dipôle décroît en $\frac{1}{r^2}$ et le champ en $\frac{1}{r^3}$ alors que pour une charge ponctuelle, ils décroissent respectivement en $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r^2}$: les effets d'un dipôle se font ressentir à moins grande distance que ceux d'une charge seule.

Champ et potentiel électrostatique s'expriment en fonction du moment dipolaire $\vec{p}$ et non en fonction de a et de q séparément : le moment dipolaire est la grandeur caractéristique du dipôle.

1.5 Lignes de champ

On cherche les lignes tangentes au champ électrostatique en tout point en utilisant la relation :

$$\vec{E}(M) \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{0}$$

qu'on écrit en coordonnées polaires :

$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \mathrm{d}r \\ r\mathrm{d}\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit :

$$rE_r\mathrm{d}\theta = E_\theta \mathrm{d}r$$

On obtient :

$$\frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}\theta = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathrm{d}r$$

En séparant les variables, on en déduit :

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = 2\frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sin\theta} = 2\frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\sin\theta}$$

Soit après intégration :

$$\ln r = 2\ln|\sin\theta| + C$$

ou en prenant l'exponentielle :

$$\boxed{\boldsymbol{r = \lambda \sin^2\theta}}$$

Où λ est une constante.
D'où l'allure des lignes de champ :

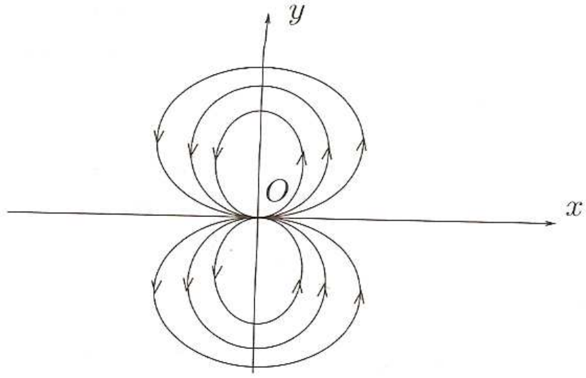

FIGURE 4 Lignes de champ du dipôle électrostatique

1.6 Equipotentielles

Elles sont définies par l'ensemble des points ayant le même potentiel soit

$$V = V_0 = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

donc :

$$\boxed{\boldsymbol{r = \mu\sqrt{|\cos\theta|}}}$$

où μ est une constante.
D'où l'allure des équipotentielles :

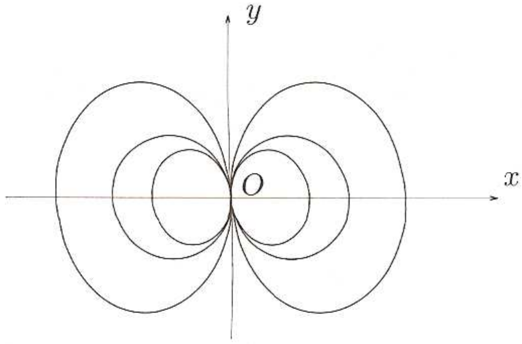

FIGURE 5 Equipotentielles du dipôle électrostatique

1.7 Tracé du diagramme électrique

On peut superposer les deux tracés précédents sur un même diagramme électrique (FIGURE **6**).

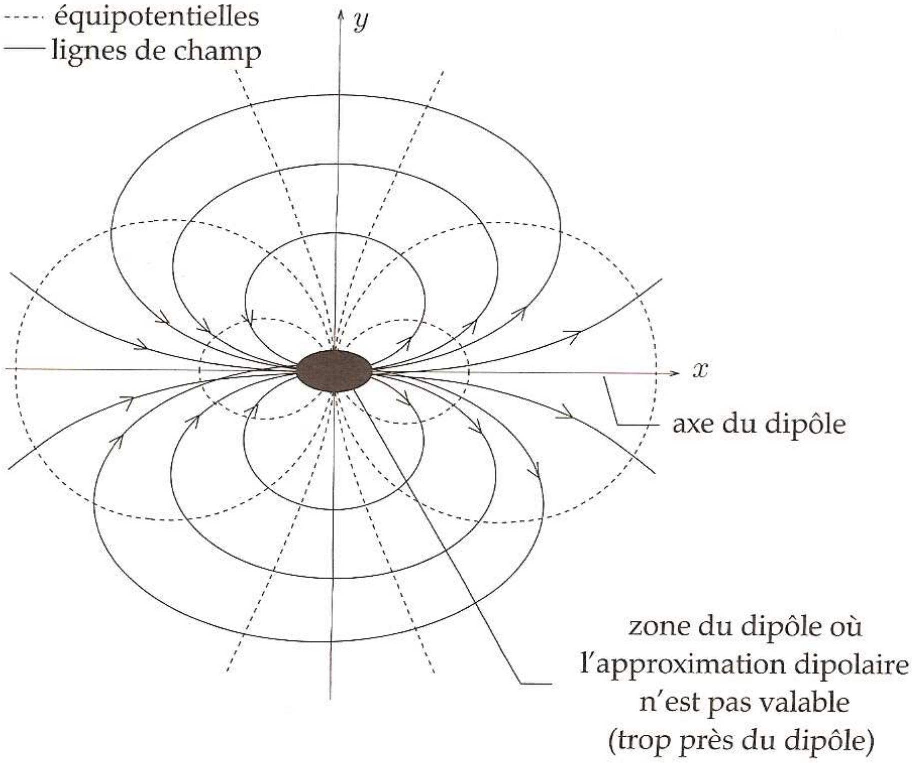

FIGURE 6 Diagramme électrique du dipôle électrostatique

REMARQUES :

On peut formuler les remarques suivantes :

- Lignes de champ et équipotentielles sont en tout point de l'espace orthogonales.
- La zone où se trouve le dipôle est une zone où les calculs précédents ne sont pas valables, ils ne donnent pas l'allure des lignes de champ ou des équipotentielles : on n'est pas suffisamment « loin » de la distribution. Cette zone a été noircie sur la représentation.

❖❖❖

2 Action d'un champ extérieur sur un dipôle

2.1 Cas d'un champ uniforme

On s'intéresse tout d'abord à l'action subie par un dipôle dans un champ électrostatique uniforme en déterminant la force et le moment qu'il subit.

2.1.1 Force exercée sur un dipôle par un champ électrostatique extérieur uniforme

La force qui s'exerce sur un dipôle électrostatique est la somme des forces qui s'exercent sur chacune des deux charges. On peut noter que la force d'interaction entre les deux charges constituant le dipôle donne une contribution nulle par le principe des actions réciproques.
Donc :

$$\vec{F} = q\vec{E}(P) - q\vec{E}(N)$$

Si le champ est uniforme, $\vec{E}(P) = \vec{E}(N)$ et :

$$\boxed{\vec{F} = \vec{0}}$$

Un champ électrostatique uniforme n'exerce pas de force sur un dipôle électrostatique.

2.1.2 Moment exercé sur un dipôle par un champ électrostatique extérieur uniforme

De la même manière, le moment qui s'exerce sur le dipôle est :

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = \overrightarrow{OP} \wedge q\vec{E}(P) - \overrightarrow{ON} \wedge q\vec{E}(N)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = q\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}\right) \wedge \vec{E}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = q\overrightarrow{NP} \wedge \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{p} \wedge \vec{E}}$$

On notera que le moment obtenu est indépendant du point où on le calcule.

2.1.3 Analyse quantitative de l'action d'un champ électrostatique extérieur uniforme sur un dipôle

L'action d'un champ électrostatique extérieur uniforme sur un dipôle se réduit à un couple de moment :

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

En notant θ l'angle entre $\vec{p}$ et $\vec{E}$ et $\vec{k}$ un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{p}$ et $\vec{E}$, le couple s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_0} = pE \sin\theta \, \vec{k}$$

D'après le théorème du moment cinétique, on aura un état d'équilibre si le moment des forces est nul donc si $\sin\theta = 0$, à savoir si :

$$\theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi$$

Cela correspond à des positions du dipôle parallèle ou antiparallèle au champ électrostatique.

Pour discuter de la stabilité de ces positions d'équilibre, on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre et on analyse le type de mouvement que le moment du couple tend à créer.

- Dipôle parallèle :

  Les forces tendent à ramener le dipôle dans sa position d'équilibre donc l'équilibre des dipôles parallèles au champ est stable.

- Dipôle antiparallèle :

  Les forces tendent à écarter le dipôle de sa position d'équilibre donc l'équilibre des dipôles antiparallèles est instable.

EN RESUME :

Un champ électrostatique uniforme tend donc à orienter les dipôles électrostatiques suivant les lignes de champ.

REMARQUE :

A l'échelle du dipôle, tout champ est en première approximation uniforme : l'effet principal du champ extérieur sur un dipôle est son orientation suivant les lignes de champ.

2.2 Cas d'un champ non uniforme

Aucune expression établie dans ce paragraphe n'est exigible dans le cadre du programme ; seule l'analyse qualitative du phénomène est à retenir. En cas de besoin, il faudra redémontrer toutes les relations qui pourront obtenues ici.

2.2.1 Force exercée sur un dipôle par un champ électrostatique extérieur non uniforme

La force s'exprime par :

$$\vec{F} = q\vec{E}(P) - q\vec{E}(N) = q\left(\vec{E}(P) - \vec{E}(N)\right)$$

Le champ extérieur n'étant pas uniforme, cette force n'est pas nulle : il faut tenir compte des variations du champ entre P et N. Or la définition d'un dipôle impose à la distance PN d'être faible devant les distances caractéristiques du problème donc en particulier devant la distance caractéristique des variations du champ électrostatique extérieur auquel le dipôle est soumis. Par conséquent, on peut effectuer un développement limité du champ électrostatique en P et en N.

On va se placer en coordonnées cartésiennes pour effectuer la démonstration. Le résultat est cependant tout à fait général et indépendant du système de cordonnées dans lequel on se place. On cherchera donc à obtenir une expression intrinsèque. Soient (x, y, z) les coordonnées du milieu de $[PN]$ et $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ les composantes de $\overrightarrow{NP}$. Les coordonnées des points P et N sont donc respectivement :

$$\left(x + \tfrac{\Delta x}{2}, y + \tfrac{\Delta y}{2}, z + \tfrac{\Delta z}{2}\right) \text{ et } \left(x - \tfrac{\Delta x}{2}, y - \tfrac{\Delta y}{2}, z - \tfrac{\Delta z}{2}\right)$$

On en déduit pour la composante suivant Ox de la force :

$$F_x = q\left(E_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2}\right) - E_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z - \frac{\Delta z}{2}\right)\right)$$

Le développement limité au premier ordre de la composante sur Ox du champ donne :

$$\begin{aligned}
F_x &= q\left(E_x(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial E_x}{\partial z} + \cdots - E_x(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial E_x}{\partial y}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial E_x}{\partial z} + \cdots\right) \\
&= q\left(\Delta x\frac{\partial E_x}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial E_x}{\partial y} + \Delta z\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) \\
&= q\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\frac{\partial}{\partial z}\right)E_x \\
&= \vec{p}.\left(\overrightarrow{\text{grad}}E_x\right)
\end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue, on obtient :

$$F_y = \vec{p}.\left(\overrightarrow{\text{grad}}E_y\right)$$

et :

$$F_z = \vec{p}.\left(\overrightarrow{\text{grad}}E_z\right)$$

On note $\vec{F} = (\vec{p}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{E}$, ce qui signifie que $F_x = \vec{p}.\left(\overrightarrow{\text{grad}}E_x\right)$, $F_y = \vec{p}.\left(\overrightarrow{\text{grad}}E_y\right)$ et $F_z = \vec{p}.\left(\overrightarrow{\text{grad}}E_z\right)$ en coordonnées cartésiennes. L'expression de l'opérateur $\vec{p}.\overrightarrow{\text{grad}}$ est beaucoup plus compliquée dans les autres systèmes de coordonnées, elle sera donnée si besoin est.

- **Cas d'un dipôle rigide :**

Un dipôle est dit *rigide* si la distance entre les charges positive et négative constituant le dipôle est constante en toutes circonstances.

Dans ce cas, on peut « rentrer » les termes $q\Delta x$, $q\Delta y$ et $q\Delta z$ dans la dérivée partielle. On obtient ainsi l'expression :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F}} = \overrightarrow{\mathbf{grad}}(\vec{\boldsymbol{p}}.\vec{\boldsymbol{E}})}$$

- **Cas d'un dipôle non rigide :**

Pour un dipôle rigide en champ non uniforme, on a obtenu pour la composante F_x de la force :

$$F_x = q\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\frac{\partial}{\partial z}\right)E_x$$

Le fait que le dipôle ne soit plus rigide implique un mouvement relatif des points N et P. Cela aura pour conséquence de modifier les valeurs de Δx, Δy et Δz, mais ne changera pas le résultat final :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F}} = (\overrightarrow{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{E})}.\overrightarrow{\mathbf{grad}})\vec{\boldsymbol{E}}}$$

On doit simplement tenir compte du fait que le dipôle dépend du champ électrique.

2.2.2 Moment exercé sur un dipôle par un champ électrostatique extérieur non uniforme

On pose $\vec{E}(P) = \vec{E}(O) + \delta\vec{E}(P)$ et $\vec{E}(N) = \vec{E}(O) + \delta\vec{E}(N)$.
On procède pour le moment comme pour la force en limitant les développements limités au premier ordre non nul :

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = \overrightarrow{OP} \wedge q\vec{E}(P) + \overrightarrow{ON} \wedge \left(-q\vec{E}(N)\right)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = q\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{E}(O) + \delta\vec{E}(P)\right) - q\overrightarrow{ON} \wedge \left(\vec{E}(O) + \delta\vec{E}(N)\right)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = q(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}) \wedge \vec{E}(O) + q\left(\overrightarrow{OP} \wedge \delta\vec{E}(P) - \overrightarrow{ON} \wedge \delta\vec{E}(N)\right)\left(\vec{E}(O) + \delta\vec{E}(P)\right)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_0 \approx q\overrightarrow{NP} \wedge \vec{E}(O)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{p} \wedge \vec{E}(O)$$

en négligeant les termes du premier ordre par la suite pour ne garder que le terme d'ordre zéro qui est non nul.

Donc :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{p} \wedge \vec{E}}$$

2.2.3 Analyse quantitative de l'action d'un champ électrostatique extérieur non uniforme sur un dipôle

L'action d'un champ extérieur non uniforme dépend à la fois de la force et du couple qui s'exercent sur le dipôle.

L'action du couple tend (comme dans le cas du champ uniforme) à orienter le dipôle dans le sens des lignes de champ. Ce sera l'action principale d'un champ extérieur, qu'il soit ou non uniforme.

Quand le champ n'est pas uniforme, on doit ajouter l'action de la force :

$$\boxed{\vec{F} = (\vec{p}.\overrightarrow{\mathbf{grad}})\vec{E}}$$

Dans le cas particulier où le dipôle est parallèle au champ, on doit distinguer :
- le cas où le champ et le dipôle sont orientés dans le même sens : la force tend à attirer le dipôle vers les champs intenses,
- le cas où le champ et le dipôle sont orientés dans des sens opposés : la force tend à attirer le dipôle vers des champs faibles.

ATTENTION :

Il n'y a aucune raison *a priori* pour que dipôle et champ soient colinéaires, si ce n'est que le champ tend à orienter le dipôle suivant les lignes de champ (à cause du couple). Les dipôles seront alors attirés par les champs intenses. D'autre part, il ne faut pas oublier le phénomène d'agitation thermique qui fait osciller le dipôle autour de la position de colinéarité.