Correction

N°1

1. a. $\overrightarrow{AM_0}\,.\,\vec{n} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM_0}).\,\vec{n} = \overrightarrow{AH}.\,\vec{n} + \overrightarrow{HM_0}.\,\vec{n} = \overrightarrow{HM_0}.\,\vec{n}$.
   Comme $\overrightarrow{HM_0}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires alors $|\overrightarrow{AM_0}\,.\,\vec{n}| = HM_0\,||\vec{n}||$.
   b. D'autre part, on a $\overrightarrow{AM_0}(x_0 - x_A\,;\, y_0 - y_A)$ et $\vec{n}(a\,;b)$.
   Donc $\overrightarrow{AM_0}\,.\,\vec{n} = (x_0 - x_A)a + (y_0 - y_A)b = ax_0 + by_0 - (ax_A + by_A)$.
   Or A est sur d donc $ax_A + by_A = -c$, d'où $\overrightarrow{AM_0}\,.\,\vec{n} = ax_0 + by_0 + c$ puis $|\overrightarrow{AM_0}\,.\,\vec{n}| = |ax_0 + by_0 + c|$
2. D'après la question précédente, $HM_0\,||\,\vec{n}\,|| = |ax_0 + by_0 + c|$ i.e. $HM_0 = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{||\vec{n}||}$. Donc la distance de M_0 à la droite d est $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

N°2

On a A(1 ; 2 ; 3), B(5 ; 1 ; 7) et C(– 1 ; 2 ; 1).

1. Alors $\overrightarrow{AB}(4\,;\,-1\,;\,4)$ et $\overrightarrow{AC}(-2\,;\,0\,;\,-2)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires ce qui implique que A, B et C ne sont pas alignés donc ils définissent un plan unique.
2. On cherche $\vec{n}(x\,;\,y\,;\,z)$ normal au plan (ABC). Cela équivaut à dire que $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux ainsi que $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}$ ou encore $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$. Cela se traduit par le système : $\begin{cases} 4x - y + 4z = 0 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases}$. En choisissant $z = -1$ on obtient $x = 1$ et $y = 0$. Donc $\vec{n}(1\,;\,0\,;\,-1)$.
   Une équation du plan (ABC) est alors de la forme $x - z + d = 0$.
   A est dans (ABC) donc $1 - 3 + d = 0$ ssi $d = 2$ donc une équation du plan est $x - z + 2 = 0$.
3. L'axe (yy') admet comme vecteur directeur $\vec{u}(0\,;\,1\,;\,0)$. Or $\vec{u}\,.\,\vec{n} = 0$ donc $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}$ donc le plan (ABC) est parallèle à l'axe (yy').
4. Le plan (yOz) a pour équation $x = 0$, son intersection avec (ABC) est définie par le système $\begin{cases} x = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$. D'une manière très rigoureuse, on peut observer à l'aide d'un vecteur $\overrightarrow{n'}(1\,;\,0\,;\,0)$ normal à (yOz), que $\overrightarrow{n'}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires donc les deux plans ne sont pas parallèles. Donc leur intersection est une droite. Si on veut aller plus loin (et anticiper sur le dernier chapitre[1]), on peut même écrire la forme générale des coordonnées des points de la droite : (0 ; k ; 2) avec k qui parcourt $\mathbb{R}$.
5. D(4 ; 6 ; 0) appartient à un demi-espace délimité par (ABC) (plan inclus). On a $4 - 0 + 2 = 6 > 0$ donc ce demi-espace a pour inéquation : $x - z + 2 \geq 0$ (le plan est inclus).

N°3

On considère P_1 le plan d'équation $x - y + z - 1 = 0$ et P_2 le plan d'équation $x + y + z - 3 = 0$.

1. Distance de A(2 ; 1 ; 3) au plan $P_1 = \dfrac{|2 - 1 + 3 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

   Distance de A au plan $P_2 = \dfrac{|2 + 1 + 3 - 3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Donc A est équidistant de P_1 et de P_2.

[1] Ce qui fournit un exemple de sa relative facilité.