BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2006

MATHÉMATIQUES

Série S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures. – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 *(4 points)*

Commun à tous les candidats

Dix affirmations, réparties en trois thèmes et numérotées de 1.a à 3.d, sont proposées ci-dessous. Le candidat portera sur sa copie, en regard du numéro de l'affirmation, et avec le plus grand soin, la mention VRAI *ou* FAUX. *Chaque réponse convenable rapporte* 0,4 *point. Chaque réponse erronée enlève* 0,1 *point. Il n'est pas tenu compte de l'absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.*

1. Pour tout réel x, e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation 1.*a*	Pour tous les réels a et b : $\left(\mathrm{e}^a\right)^b = \mathrm{e}^{\left(a^b\right)}$.
Affirmation 1.*b*	Pour tous les réels a et b : $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$.
Affirmation 1.*c*	La droite d'équation $y = x+1$ est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 1.

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

Affirmation 2.*a*	Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Affirmation 2.*b*	Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.
Affirmation 2.*c*	Si f est dérivable en a, alors la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$.

Affirmation 3.*a*	Si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim(u_n + v_n) = 0$.
Affirmation 3.*b*	Si (u_n) converge vers un réel non nul et si $\lim v_n = +\infty$, alors la suite $(u_n \times v_n)$ ne converge pas.
Affirmation 3.*c*	Si (u_n) converge vers un réel non nul, si (v_n) est positive et si $\lim v_n = 0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ ne converge pas.
Affirmation 3.*d*	Si (u_n) et (v_n) convergent, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge.

Exercice 2 (*5 points*)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_n$. On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.
   Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
   Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n,
$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

3. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4. *a.* Établir que, pour tout entier naturel n, $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \mathrm{i}$.
   En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}.
   b. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$.
   On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
   Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3 (*4 points*)

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Partie A

(*cette partie constitue une restitution organisée de connaissances*)

Soit a, b, c et d des réels tels que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.
Soit P le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$.
On considère le point I de coordonnées (x_I,y_I,z_I) et le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (a,b,c).

Le but de cette partie est de démontrer que la distance de I au plan P est égale à $\dfrac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

1. Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan P.
   Déterminer, en fonction de a, b, c, x_I, y_I et z_I, un système d'équations paramétriques de Δ.

2. On note H le point d'intersection de Δ et P.
   a. Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IH}=k\vec{n}$.
   b. Déterminer l'expression de k en fonction de a, b, c, d, x_I, y_I et z_I.
   c. En déduire que $IH=\dfrac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Partie B

Le plan Q d'équation $x-y+z-11=0$ est tangent à une sphère S de centre le point Ω de coordonnées $(1,-1,3)$.

1. Déterminer le rayon de la sphère S.

2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan Q.

3. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère S et du plan Q.

Exercice 4 (*7 points*)

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.
Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0,+\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' = -\frac{1}{20}y(3-\ln y).$$

1. Démontrer l'équivalence suivante :
   Une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0,+\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0,+\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20}f(t)\left[3-\ln\left(f(t)\right)\right]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0,+\infty[$, $g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$.
2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :
$$(H) \qquad z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}.$$
3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0,+\infty[$:
$$f(t) = \exp\left(3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$

(la notation exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \mapsto e^x$).

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :
$$f(t) = \exp\left(3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$
   a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. Déterminer le sens de variation de f sur $[0,+\infty[$.

   c. Résoudre dans $[0,+\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0{,}02$.

   Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Tournez la page S.V.P.

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50 % d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas ».

On note M l'événement « l'animal est malade », $\overline{M}$ l'événement contraire et T l'événement « le test est positif ».

1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$, $P_{\overline{M}}(T)$.

2. En déduire $P(T)$.

3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?